Mat.

Professor: Alex Amaral
Luanna Ramos

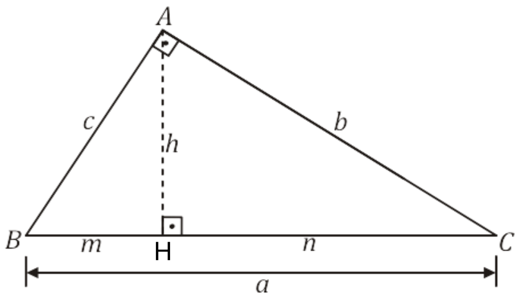
Monitor: Roberta Teixeira

Relações métricas no triângulo retângulo

18/20 abr

RESUMO

Quando trabalhamos em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide a base do triângulo em dois segmentos, chamados de projeções dos catetos.



a – Hipotenusa
b – Cateto
c – Cateto
h – Altura
m e n – Projeções dos catetos

Podemos ver que temos triângulos semelhantes entre si. Dessas semelhanças, surgem as relações métricas do triângulo retângulo.

1) Projeções X Altura:

$$\Delta ABH \sim \Delta AHC \rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \rightarrow h^2 = m.n$$

2) Projeções X Cateto X Hipotenusa:

$$\Delta ABC \sim \Delta AHC \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a.m$$

$$\Delta ABC \sim \Delta AHB \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a.n$$

3) Catetos X Hipotenusa X Altura:

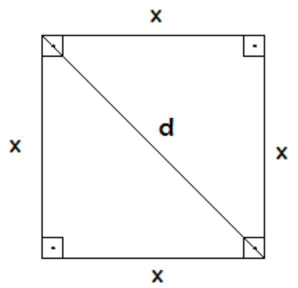
$$\Delta ABC \sim \Delta AHC \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{n} \rightarrow a.h = b.c$$

4) Teorema de Pitágoras:

Somando as equações do item 2, temos:

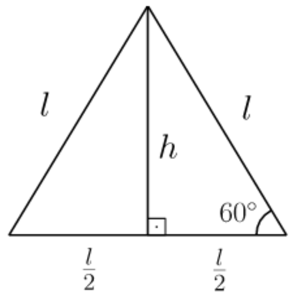
$$\begin{cases} b^2 = m.n \\ c^2 = a.n \end{cases} \rightarrow b^2 + c^2 = a.n + a.m = a(m+n) = a.a = a^2$$

Daí temos a fórmula mais famosa da geometria: $a^2 = b^2 + c^2$
Observação: É do teorema de Pitágoras que vem a fórmula da diagonal do quadrado.



$d^2 = x^2 + x^2$
$d^2 = 2x^2$
$d = x\sqrt{2}$

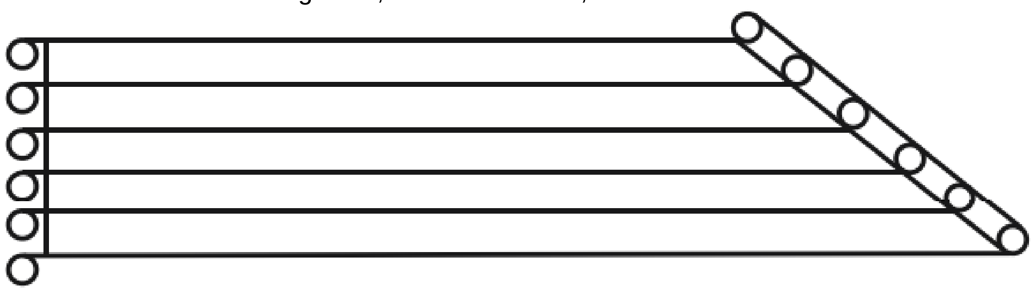
Temos também a fórmula para a altura de um triângulo equilátero.



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

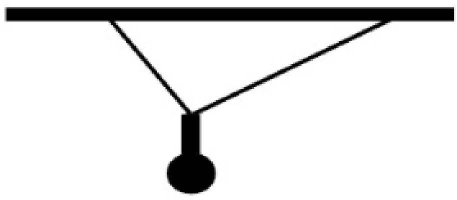
EXERCÍCIOS DE AULA

1. Um instrumento musical é formado por 6 cordas paralelas de comprimentos diferentes as quais estão fixadas em duas hastes retas, sendo que uma delas está perpendicular às cordas. O comprimento da maior corda é de 50 cm, e o da menor é de 30 cm. Sabendo que a haste não perpendicular às cordas possui 25 cm de comprimento da primeira à última corda, se todas as cordas são equidistantes, a distância entre duas cordas seguidas, em centímetros, é



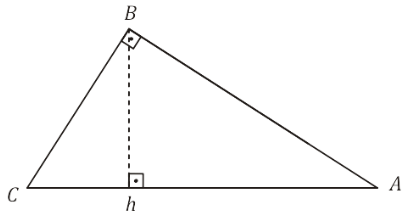
a) 1.
b) 1,5.
c) 2.
d) 2,5.
e) 3.

2. O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares, presas ao teto. Sabendo que essas cordas medem 1/2 e 6/5, a distância do lampião ao teto é?



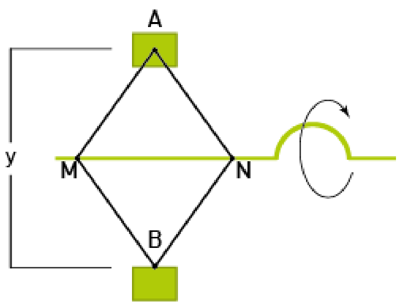
a) 1,69
b) 1,3
c) 0,6
d) 1/2
e) 6/13

3. No triângulo ABC abaixo, o ângulo do vértice B é reto e $\overline{CH} = \dfrac{\overline{AH}}{4} = 2m$



O perímetro do triângulo ABC, em metros, é aproximadamente:
a) 19
b) 21
c) 23
d) 25
e) 27

4. Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base MN possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:



Considere as seguintes medidas: AM = AN = BM = BN = 4 dm; MN = x dm; AB = y dm.
O valor, em decímetros, de x em função de y corresponde a:

a) $\sqrt{16 - 4x^2}$

b) $\sqrt{64 - x^2}$

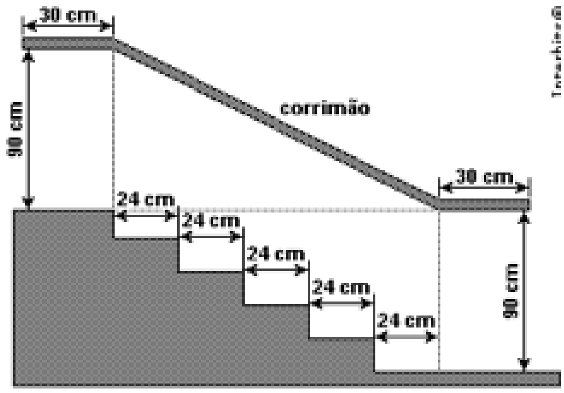
c) $\dfrac{\sqrt{16 - 4x^2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{16 - 2x^2}}{2}$

5. As projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa medem 9dm e 16dm. Neste caso os catetos medem:
a) 15dm e 20dm
b) 10dm e 12dm
c) 3dm e 4dm
d) 8dm e 63dm.

EXERCÍCIOS DE CASA

1.



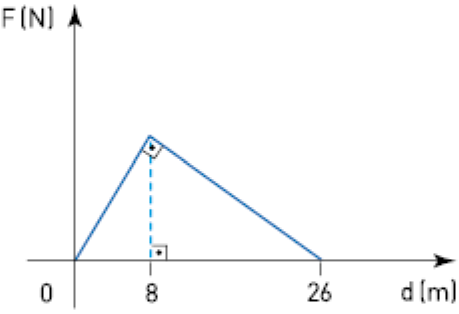
Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a
a) 1,8m
b) 1,9m
c) 2,0m
d) 2,1m
e) 2,2m

2. Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40Km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada
a) no centro do quadrado.
b) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15km dessa estrada.
c) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25km dessa estrada.
d) no vértice de um triângulo equilátero de base AB oposto a essa base.
e) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

3. Uma bicicleta saiu de um ponto que estava a 8 metros a leste de um hidrante, andou 6 metros na direção norte e parou. Assim, a distância entre a bicicleta e o hidrante passou a ser:
a) 8 metros
b) 10 metros
c) 12 metros
d) 14 metros
e) 16 metros

4. As extremidades de um fio de antena totalmente esticado estão presas no topo de um prédio e no topo de um poste, respectivamente, de 16m e 4m de altura. Considerando-se o terreno horizontal e sabendo-se que a distância entre o prédio e o poste é de 9m, o comprimento do fio, em metros, é
a) 12
b) 15
c) 20
d) 25

5. Uma pessoa empurrou um carro por uma distância de 26 m, aplicando uma força F de mesma direção e sentido do deslocamento desse carro. O gráfico abaixo representa a variação da intensidade de F, em newtons, em função do deslocamento d, em metros.

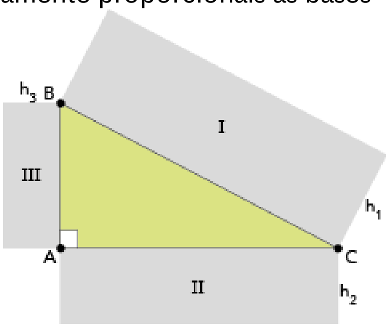


Desprezando o atrito, o trabalho total, em joules, realizado por F, equivale a:
OBS: Lembrando que o trabalho de uma força não constante é calculado através da área sob o gráfico.
a) 117
b) 130
c) 143
d) 156

6. Seja ABCD um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é

a) $\frac{21}{8}$ b) $\frac{27}{8}$ c) $\frac{35}{8}$ d) $\frac{37}{8}$ e) $\frac{45}{8}$

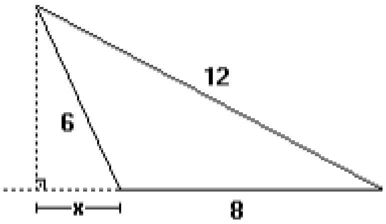
7. Na figura a seguir, estão representados o triângulo retângulo ABC e os retângulos semelhantes I, II e III, de alturas h_1, h_2 e h_3 respectivamente proporcionais às bases $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



Se $\overline{AC}$ = 4 m e $\overline{AB}$ = 3 m, a razão $\dfrac{4h_2 + 3h_3}{h_1}$ é igual a:
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

8. Se os catetos de um triângulo retângulo T, medem, respectivamente, 12 cm e 5 cm, então a altura de T relativa à hipotenusa é:
a) 12/5 m
b) 5/13 m
c) 12/13 m
d) 25/13 m
e) 60/13 m

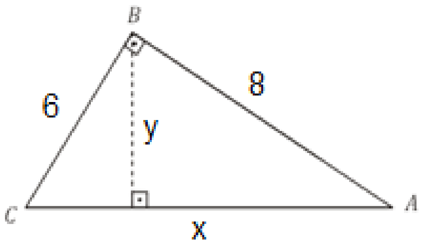
9. Dada a figura



Qual o valor de x?

a) 2,15
b) 2,35
c) 2,75
d) 3,15
e) 3,35

10. Calcule o valor de x e y:



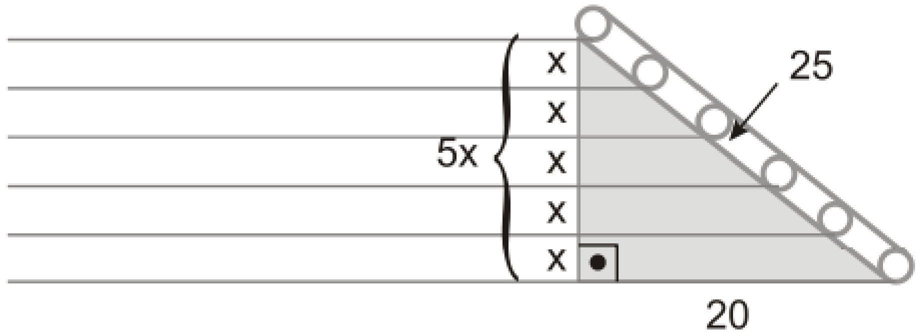
PUZZLE

Deseja-se descobrir quantos degraus são visíveis numa escada rolante. Para isso foi feito o seguinte: duas pessoas começaram a subir a escada juntas, uma subindo um degrau de cada vez enquanto que a outra subia dois. Ao chegar ao topo, o primeiro contou 21 degraus enquanto o outro 28. Com esses dados foi possível responder a questão. Quantos degraus são visíveis nessa escada rolante? (obs: a escada está andando).

GABARITO

Exercícios de aula

1. e



$25^2 = 20^2 + (5x)^2$
$625 = 400 + 25x^2$
$25x^2 = 225$
$x^2 = 9$
$x = 3$

2. e

$x^2 = (1/2)^2 + (6/5)^2 = 1/4 + 36/25 = 25/100 + 144/100 = 169/100$
$x = 13/10$

Agora, vamos usar uma relação métrica do triângulo retângulo que diz que o produto entre os catetos é igual ao produto da hipotenusa com a altura.

$(1/2) * (6/5) = (13/10) * x$
$(13x/10) = (6/10)$
$13x = 6$
$x = 6/13.$

3. c

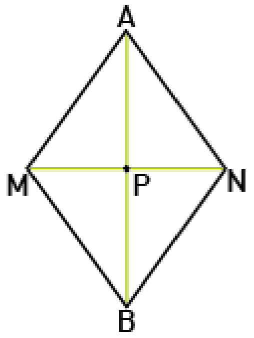
Sabemos que CH = 2 e AH = 8. Para calcular o lado AB, usarei a fórmula $b^2 = am$.
$b^2 = 10.8 = 80.$
$b = \sqrt{80}$.

Para calcular o lado BC, usarei a fórmula $c^2 = an$.
$c^2 = 10.2 = 20.$
$c = \sqrt{20}$.

Finalmente, calculando o perímetro:
$2p = \sqrt{20} + \sqrt{80} + 10 = 23,41 \cong 23.$

4. b

Observe a imagem:



AMBN é um losango, pois é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. Como as diagonais do losango são perpendiculares, ANP é um triângulo retângulo, com hipotenusa AN = 4 dm. Seus catetos são:

$$AP = \frac{AB}{2} = \frac{y}{2}$$

$$PN = \frac{MN}{2} = \frac{x}{2}$$

De acordo com o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(AP)^2 + (PN)^2 = (AN)^2$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 4^2$$

$$y^2 + x^2 = 64$$

$$y = \sqrt{64 - x^2}$$

5. a
Projeções:

$$n = 9\ dm$$
$$m = 16\ dm$$

Relações métricas no triângulo retângulo:

$$a = m + n$$
$$b^2 = a * m$$
$$c^2 = a * n$$
$$a * h = b * c$$
$$a^2 = c^2 + a^2$$

a = hipotenusa
m, n = projeções ortogonais dos catetos
b, c = catetos

Primeiramente, sabemos que: $a = m + n$

$$a = 9 + 16$$
$$a = 25\ dm$$

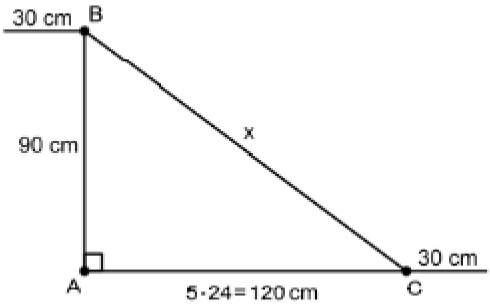
$b^2 = a * m$
$b^2 = 25 * 16$
$b = \sqrt{25 * 16}$
$b = \sqrt{25} * \sqrt{16}$
$b = 5 * 4$
$b = 20\ dm$

$c^2 = a * n$
$c^2 = 25 * 9$
$c = \sqrt{25 * 9}$
$c = \sqrt{25} * \sqrt{9}$
$c = 5 * 3$
$c = 15\ dm$

Exercícios de casa

1. d

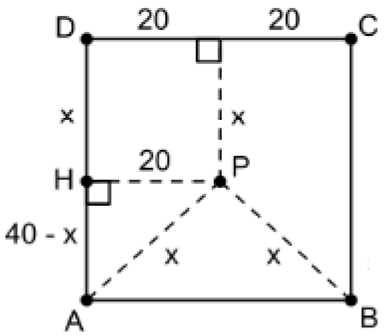
Observe a figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:
$x^2 = 90^2 + 120^2$
x = 15m.
Portanto, o comprimento total do corrimão é 1,5 + 2.0,3 = 2,1.

2. c

Considere a figura abaixo, em que P representa o local em que a estação deverá ser construída:



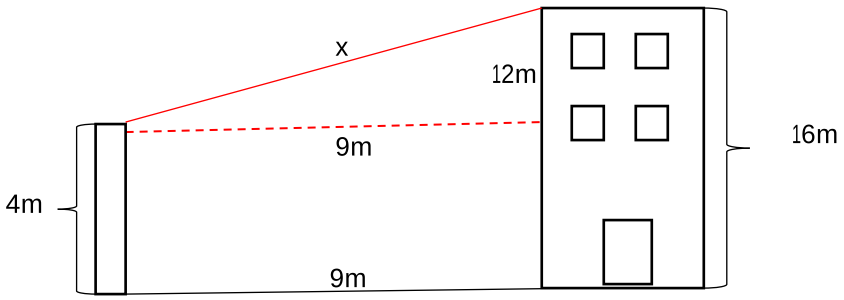
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo APH temos:
$x^2 = 20^2 + (40 - x)^2$
$x^2 = 400 + 1600 - 80x + x^2$
$80x = 2000$
x = 25 km.

3. b

Sejam A o ponto onde se encontrava inicialmente a bicicleta e B o ponto a 6 metros ao norte de A. Chamando de C o ponto onde se encontra o hidrante, segue que a distância pedida corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, reto em A. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$BC^2 = AC^2 + AB$
$BC^2 = 8^2 + 6^2$
$BC = 10$ m.

4. b
De acordo com os dados fornecidos, podemos imaginar um triângulo retângulo, como representado em vermelho no desenho anexo, cujos catetos medem 9 e 12 metros, e hipotenusa x, que queremos descobrir o valor.



Pra isso, basta aplicarmos Pitágoras, estabelecendo a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos. Isto é:

$$x^2 = 9^2 + 12^2$$
$$x^2 = 81 + 144$$
$$x = \sqrt{225}$$
$$x = 15m$$

5. d
A altura h do triângulo retângulo de base $b = 26$ m corresponde a:

$$h = \sqrt{m \times n}$$

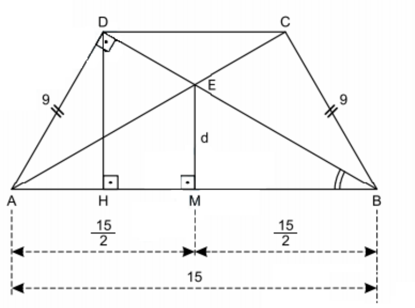
sendo m e n o comprimento dos segmentos em que a altura divide a base do triângulo. Logo:

$$h = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$$

O trabalho T de uma força não constante, ao longo de um deslocamento d, é dado pela área do gráfico F x d. Nesse caso, T corresponde à área do triângulo retângulo de base $b = 26$ m e altura $h = 12$ m:

$$T = S_\Delta$$
$$T = \frac{1}{2}(b \times h) = \frac{26 \times 12}{2} = 156 \text{ J}$$

6. e
Observe a figura:



No triângulo retângulo ADB, temos:
I) $(BD)^2 + (AD)^2 = (AB)^2 \Rightarrow (BD)^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow \Rightarrow BD = 12$
II) $(AB) . (DH) = (AD) . (BD) \Rightarrow 15 . DH = 9 . 12 \Leftrightarrow DH = 36/5$.
III) $(BD)^2 = (AB)(BH) \Rightarrow 122 = 15 . BH \Leftrightarrow BH = 48/5$.

Sendo d a distância entre o lado AB e o ponto em que as diagonais se cortam, da semelhança dos triângulos BME e BHD, temos:

$$\frac{EM}{DH} = \frac{BM}{BH}$$

$$\frac{d}{\frac{35}{5}} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{48}{5}}$$

d = 45/8.

7. a

De acordo com o teorema de Pitágoras, se $\overline{AC}$ = 4m e $\overline{AB}$ = 3m, $\overline{BC}$ = 5m. Como h_1, h_2 e h_3 são proporcionais a 5, 4 e 3, respectivamente, então existe um número real positivo n, tal que $h_1 = 5n$, $h_2 = 4n$ e $h_3 = 3n$.

Calculando-se a razão:

$$\frac{4h_2 + 3h_3}{h_1} =$$

$$\frac{4 \times 4n + 3 \times 3n}{5n} =$$

$$\frac{16t + 9t}{5t} = 5$$

8. e

Vamos achar 1° a hipotenusa

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=12^2+5^2$

$a^2=144+25$

$a^2=169$

$a=\sqrt{169}$

a = 13

Vamos a altura

ah = bc

13a = 12×5

13a = 60

$a = \frac{60}{13}$

9. c

I) $x^2+y^2=36$

II) $(x+8)^2 + y^2 = 144$

$x^2 + 16x + 64 + y^2 = 144$

16x = 44

x = 2,75

10. Por Pitágoras, temos que:

$x^2 = 6^2 + 8^2$

x = 10.

Agora, para calcular a altura, usaremos a fórmula:

ah = BC

10y = 6.8

y = 24/5.

Puzzle

Para facilitar vamos dar nome as pessoas:

GUSTAVO sobe 2 degraus por vez.

MARCOS sobe 1 degrau por vez.

Conforme diz o enunciado, quando GUSTAVO chegou ao topo ele contou 28 degraus. Como ele anda 2 por vez, na verdade o GUSTAVO deu 14 passos. Então quando ele chegou no topo, o MARCOS havia andado 14 degraus, pois ele anda 1 por vez (faça o desenho que você entenderá melhor).

Lembre-se que a escada está andando. Então ao mesmo tempo que GUSTAVO andou 28 e o MARCOS andou 14, a escada havia andado sozinha X degraus. O enunciado diz que quando MARCOS chegou ao topo ele contou 21 degraus. Como ele está no 14, ainda faltam 7 para ele chegar ao topo (ou seja, falta metade do que ele já andou - 7 é metade de 14). Portanto durante esses 7 que faltam, a escada andará sozinha mais X/2 degraus (pois se em 14 degraus ela andou X, em 7 ela andará X/2).

FEITO! O número de degraus visíveis para o GUSTAVO e para o MARCOS deve ser o mesmo. Então basta montar a equação:

$$28 + X = (14 + X) + (7 + (X/2))$$

$$28 + X = 21 + (3X/2)$$

$$28 - 21 = (3X/2) - X$$

$$7 = X/2$$

$$X = 14$$

Se $X = 14$, o número de degraus visíveis é (o GUSTAVO andou $28 + X$ no total):

$$28 + 14 = 42 \text{ degraus}$$

Note que para o MARCOS o resultado deve ser o mesmo:

$$(14 + X) + (7 + (X/2)) = (14 + 14) + (7 + 14/2) = 28 + 14 = 42 \text{ degraus}$$